$$= \sum_{k=0}^{k=n} V_k + 2(n+1)$$

$$= V_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + 2(n+1)$$

$$= (-1) \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + 2(n+1)$$

$$\boxed{S_n = -2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+2(n+1)}$$

e/ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+2\left(\frac{(n+1)}{n}\right)$

$= 0+2=2$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 2}$

Exercice 10

$K_n = \int_0^1 (x+1)e^{-nx}dx$, $I = \int_0^1 xe^{-x}$

1) a/*/ $K_0 = \int_0^1 (x+1)dx = \left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^1$

$= 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{K_0 = \frac{3}{2}}$

*/ $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$: par parties:

$U(x) = x \to U'(x) = 1$

$V'(x) = e^{-x} \to V(x) = -e^{-x}$

$I = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)dx$

$= -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - \left[e^{-1}-1\right]$

$= -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - 2e^{-1}$

Donc $\boxed{I = 1-\frac{2}{e}}$

*/ on a : $K_1 = \int_0^1 (1+x)e^{-x}dx$

$K_1 - I = \int_0^1 (1+x)e^{-x}dx - \int_0^1 xe^{-x}dx$

$= \int_0^1 \left(e^{-x} + xe^{-x} - xe^{-x}\right)dx$

$= \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1$

$= -e^{-1}+1 = 1-e^{-1} = 1-\frac{1}{e}$

Donc : $\boxed{K_1 - I = 1-\frac{1}{e}}$

$K_1 - I = 1-\frac{1}{e} \Rightarrow K_1 = I+1-\frac{1}{e} = 1-\frac{2}{e}+1-\frac{1}{e}$

Il en résulte : $\boxed{K_1 = 2-\frac{3}{e}}$

b/ $K_{n+1} - K_n =$

$\int_0^1 (1+x)e^{-(n+1)x}dx - \int_0^1 (1+x)e^{-nx}dx, n \in \mathbb{N}$

$= \int_0^1 (1+x)e^{-nx}\left[e^{-x}-1\right]dx$

On a : $0 \le x \le 1 \Leftrightarrow -1 \le -x \le 0$

$\Leftrightarrow e^{-1} \le e^{-x} \le 1$ Donc $e^{-x}-1 \le 0$

et $(1+x)e^{-nx} \ge 0$ donc

$(1+x)e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right) \le 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \overbrace{(1+x)e^{-nx}\left(e^{-x}-1\right)}^{+}dx \le 0$

D'où $K_{n+1} - K_n \le 0$ ce qui prouve que (K_n) est une suite décroissante.

c/ on a : $(1+x)e^{-(nx)} \ge 0$ et

$\int_0^1 (1+x)e^{-nx}dx \ge 0 \Rightarrow K_n \ge 0$ D'où (K_n) est une suite décroissante et minorée par 0 d'où elle est convergente.

2) a/ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le x \le 1$

$\Leftrightarrow 1 \le x+1 \le 2$ et $e^{-nx} \ge 0$

$\Leftrightarrow \boxed{e^{-nx} \le (1+x)e^{-nx} \le 2e^{-nx}}$

b/ on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in [0,1]$

$(E) : e^{-nx} \le (1+x)e^{-nx} \le 2e^{-nx}$

En intégrant les trois membres de l'inégalité (E)

On obtient : $\int_0^1 e^{-nx}dx \le K_n \le \int_0^1 2e^{-nx} \Leftrightarrow$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn